Mecânica e Ondas **2º Semestre 2013/14**

Guia do Pêndulo Físico

Trabalho laboratorial sobre **Oscilações do corpo rígido**

Introdução, Objectivos e Equipamento

Pretende-se com este trabalho laboratorial que os estudantes meçam o período de um sólido que oscila em torno de um eixo de rotação. A partir dele é possível responder a questões mais específicas com ele relacionadas, como sejam:

- A aproximação dospequenos ângulos conduz ou não a um errodesprezável?
- Um pêndulo físico pode ser substituido por um matemático colocado no CM?

Objectivos:

- Perceber as leis do pêndulo físico.
- Comparar com o pêndulo matemático.
- Verificar aproximação para pequenos ângulos.
- Constatar a importância dos momentos de inércia na correcta descrição do pêndulo.

Dispomos, para o efeito, de um pêndulo físico constituído por uma vara com o comprimento aproximado de 50 cm munida de um circuito contendo um acelerómetro de dois eixos, bem como de um peso que se pode deslocar ao longo da vara, permitindo simular pêndulos com diferentes períodos e verificar a validade da aproximação dos pequenos ângulos.

Neste trabalho é proposto aos alunos que realizem uma sucessão de lançamentos de pêndulos físicos com o mesmo comprimento mas massas e posição do Centro de Massa diferentes, de modo a poder estudar a função Período de oscilação.

O momento de inércia em torno do eixo de rotação comum a todos os objectos – o eixo fixo – tem apenas três fórmulas diferentes:

- **Rolamento circular**: Aceitando que o Rolamento se pode aproximar por um Disco sólido, podemos usar $I_R = \frac{1}{2} M_R R^2$, em que M_R é a massa do rolamento e R é o seu raio. $M_R = 9*10^{-3}$ Kg ; $R = 0.11*10^{-3}$ m
- **Vara** de comprimento L_V: $I_V = \frac{1}{3} M_V L_V^2$, em que M_V e L_V são as suas massa e comprimento. $M_V = 54*10^{-3}$ kg ; $L_V = 0.50$ m
- **Peso** de comprimento L_P: $I_P = \frac{1}{12} M_P L_P^2 + M_P x^2$, em que M_P e L_P são as suas massas e comprimento, x representa a distância do seu CM ao eixo de rotação (variável). $M_P = 25*10^{-3}$ g ; $L_P = 0.05$ m

Todos os alunos dispõem de computador e software próprio instalado (LabView e Origin). A aquisição é feita recorrendo a placas de hardware NI-DAC (USB – 6008) às quais se associa software apropriado, desenvolvido em ambiente LabView, obtendo-se um output adequado. A partir dos pares (posição, período) pede-se aos alunos que façam uma comparação com o pêndulo matemático colocado no CM do sistema e obtenham a curva T (x) analisando-a.

Síntese dos dados experimentais relativos às componentes do pêndulo:

Rolamento: $M_R = 9$ g, $R = 1.1$ cm, $I_R = 5.445*10^{-7}$ Kg.m^2

Vara: $M_V = 54$ g, $L_V = 50$ cm, $I_V = 45*10^{-4}$ Kg.m^2

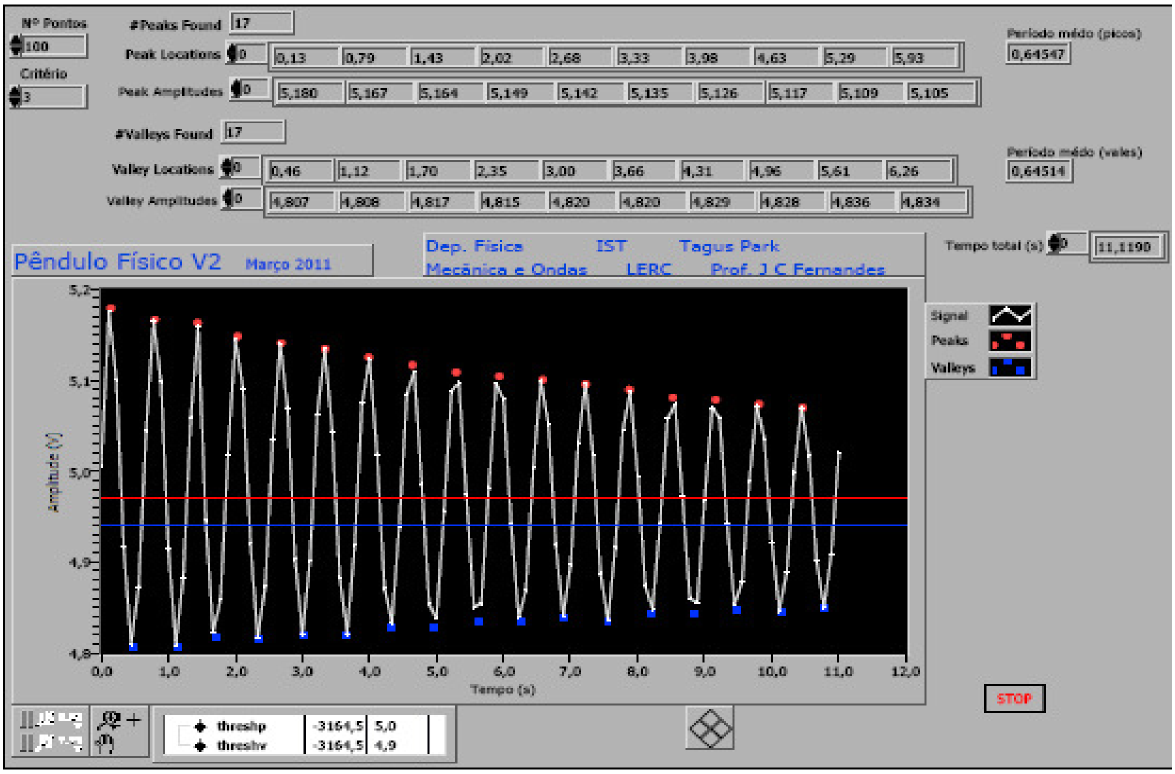
Peso: $M_P = 25$ g, $L_P = 5$ cm, $I_P = 52.08*10^{-7}$ Kg.m^2

Dentro da vara é colocado um acelerómetro de dois eixos, (x,y), alinhando o eixo dos yy com o eixo vertical do pêndulo em posição de equilíbrio. A leitura é apenas feita no eixo dos xx (devido à exiguidade de tempo em laboratório). Quando em oscilação, esta componente é sempre tangencial e permite estudar a componente tangencial da aceleração linear do pêndulo no ponto do acelerómetro. Este sinal reproduz (ver anexo teórico) uma sinusóide de frequência igual à do pêndulo e uma amplitude que é proporcional à amplitude angular de oscilação e à distância ao eixo de rotação. A sua aquisição permite pois obter informação do período em cada oscilação, grandes e pequenos ângulos e atenuação no tempo. Neste trabalho de 2h não analisaremos o comportamento da amplitude mas concentramos a atenção no comportamento temporal.

Parte I - Experimental

Comece por criar na sua área de aluno um directório para receber o ficheiro executável deste trabalho. Vá à página da cadeira em http://mo-lerc-tagus.ist.utl.pt entre em **laboratório** ⇨ **2º trabalho de Laboratório**. Aparece-lhe o ficheiro: **Executável Pêndulo V2** que deve copiar para a sua área fazendo **Save to disk** para o directório que acabou de criar no seu **Ambiente de trabalho**. Faça o winzip dessa file para extrair a executável **PenduloV2.exe** . Está pronto a iniciar.

O programa faz um run inicial, sem experiência. Vai encontrar um painel frontal com vários indicadores.



Um visor gráfico simula um ecran de osciloscópio com uma base de tempo horizontal em **segundos** e uma escala vertical em **Volts**. Existem vários botões para controlar a aquisição, usualmente não será necessário alterar os valores pré-estabelecidos.

Nº Pontos: define o intervalo de tempo da sua amostra (nº pontos da amostra). Por default, assume-se 100 o que implica um tempo aproximado de 12 s.

Critério: Nº de pontos para detectar um pico. Default 3.

Thresphp: Define o patamar a partir do qual queremos detectar picos. Default assume-se 5.0.

Thresphp: Define o patamar a partir do qual queremos detectar vales. Default assume-se 4.9.

Na parte superior do painel frontal encontram-se os indicadores numéricos dos resultados obtidos:

 # Peaks Found: indica o nº de picos encontrados, assinalados no mostrador com pequenos rectângulos a vermelho.

Peak Locations: indica a localização dos picos detectados.
Amplitudes: indica as amplitudes de cada um dos picos detectados.
Período médio (picos): O valor médio do período usando os picos encontrados

 # Valleys Found: indica o nº de vales encontrados, assinalados no mostrador com pequenos rectângulos a azul.
Valley Locations: indica a localização dos vales detectados.
Amplitudes: indica as amplitudes de cada um dos vales detectados.
Período médio (vales): O valor médio do período usando os vales encontrados

O valor do período médio a usar poderá ser quer o dos picos quer o dos vales ou ainda melhor, a média dos dois. Por exiguidade de tempo vamos usar apenas o período médio dos picos. Esta informação deve ser escrita directamente pelo aluno nos quadros do Relatório sempre que seja feita uma aquisição útil

Na barra superior do programa existem vários botões, mas só lhe interessa o **Run** representado por uma seta ⇨. Ao clicar nele uma vez o programa arranca o colhe uma amostra de sinal.

Início da experiência

Comece por usar a vara sem peso.

1. Objectivo: Analisar a variação do Período com o ângulo inicial do pêndulo.

$$T_{exacto} = \frac{2\pi}{\omega_0}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+...\right] \text{com } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgX_{CM}}}$$

Escolha um **Nº Pontos** de **50**. (Preencha a tabela 2)

- Afaste o pêndulo de um ângulo grande (ex. 45º) e obtenha o valor do período.
- Afaste o pêndulo de um ângulo médio (ex. 30º) e obtenha o valor do período.
- Afaste o pêndulo de um ângulo pequeno (ex. 10º) e obtenha o valor do período.

Este conjunto de ensaios vai permitir analisar o comportamento do período do pêndulo em função da amplitude angular, quantificando o erro que se comete usando a aproximação dos pequenos ângulos. (Ver apêndice teórico).

$$\frac{T}{T_0} = \left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+...\right]$$

2. Objectivo: Comparar o Período de uma vara simples de massa M e comprimento L, a oscilar em torno da sua extremidade, com o de uma massa pontual M a oscilar na extremidade de um fio de comprimento L/2.

$$T_{só\ var\ a} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{2}{3}L_V + \frac{M_R R^2}{M_V L_V}} \quad ; \quad T_{pontual} = 2\pi\sqrt{\frac{L_V/2}{g}}$$

Escolha um **Nº Pontos** de **150** ou superior.

- Afaste o pêndulo de um ângulo médio (ex. 30º) e obtenha o valor do período. (pode fazer vários ensaios para obter média).

NOTA IMPORTANTE: A partir deste momento todos os lançamentos devem ser feitos a partir da mesma posição inicial para que os valores do período médio possam ser comparáveis.

Este ensaio vai permitir analisar o comportamento do período do pêndulo físico simples (só uma vara) comparando-o com o pêndulo matemático equivalente, colocado no seu CM. (Ver apêndice teórico).

$$\frac{T_{só\ var\ a}}{T_{pontual}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}L_V + \frac{M_R R^2}{M_V L_V}}{L_V/2}}$$

Coloque o peso na vara.

3. Objectivo: Obter o Período de oscilação de uma vara com um peso de posição variável, a oscilar em torno da sua extremidade, em função da posição do peso.

$$T_{\text{var}\,a+peso} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{A+x^2}{B+x}} \quad \text{com} \quad \begin{cases} A = \dfrac{M_V L_V^2}{3M_P} + \dfrac{M_R R^2}{2M_P} + \dfrac{1}{12}L_P^2 \\ B = \dfrac{M_V L_V}{2M_P} \end{cases}$$

Mantenha um **Nº Pontos** de **150** ou superior. (Preencha a tabela 3)

- Coloque o peso na posição mais baixa, parafuso a 48.5 cm do eixo, garantindo que o conjunto mantém o mesmo comprimento total.

Afaste o pêndulo de um ângulo médio (ex. 30º) e obtenha o valor do período.

Este ensaio vai permitir analisar o comportamento do período de pêndulo físico, com o mesmo tipo de geometria, mas diferente posição do centro de massa e comparar com o pêndulo matemático equivalente, colocado no CM. (Ver apêndice teórico).

- Repita o ponto anterior sucessivas vezes, colocando o peso em posições cada vez mais altas de modo a cobrir toda a vara. Sugere-se que sejam feitos ensaios a: 48.5, 43.5, 38.5, 33.5, 28.5, 23.5, 18.5, 13.5, 10.0, 8.5, 5.0 e 4.0 cm.

Este conjunto de ensaios vai permitir analisar a curva do período do nosso pêndulo físico em função da distância x, do CM do peso ao eixo de rotação massa e comparar com o pêndulo matemático equivalente, colocado no CM. (Ver apêndice teórico).

Posição de Centro de Massa: $X_{CM} = \dfrac{M_V \dfrac{L_V}{2} + M_P x}{M}$

Período do pêndulo físico : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}M_V L_V^2 + \frac{1}{2}M_R R^2 + \frac{1}{12}M_P L_P^2 + M_P x^2}{g\left(M_V \dfrac{L_V}{2} + M_P x\right)}}$

$$T_{\text{var}\,a+peso} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{A_{teórico}+x^2}{B_{teórico}+x}} \quad \text{com} \quad \begin{cases} A_{teórico} = \dfrac{M_V L_V^2}{3M_P} + \dfrac{M_R R^2}{2M_P} + \dfrac{1}{12}L_P^2 \\ B_{teórico} = \dfrac{M_V L_V}{2M_P} \end{cases}$$

Período do pêndulo matemático: $T_{pontual} = 2\pi\sqrt{\dfrac{X_{CM}}{g}}$

Parte II - Análise de dados

Na **Parte I** colheu os dados experimentais que lhe vão permitir analisar o comportamento de um pêndulo físico e responder a algumas perguntas do objectivo, nomeadamente:

- ❖ Podemos substituir um pêndulo físico por um pêndulo matemático equivalente?
- ❖ A aproximação matemática dos pequenos ângulos é satisfatória?
- ❖ Aprendeu a descrever, quantitativa e qualitativamente as oscilações de um corpo sólido?

Os passos necessários para fazer a análise de dados vêm descritos extensivamente no enunciado do Relatório proposto, que encontra anexado na página da disciplina e que deverá entregar no final da aula laboratorial.

O apoio teórico a este trabalho vem na terceira parte deste guia como Anexos Teóricos. Dada a exiguidade de tempo (2h) para a experiência e elaboração de relatório algumas das questões teóricas (por exemplo preenchimento de quadros) deverão ser respondidas antecipadamente, de modo a optimizar a permanência em Laboratório.

Os alunos devem estar familiarizados com o programa gráfico **Origin** (já usado anteriormente).

- Deve ser evitado o uso de calculadoras ou outro tipo de software para fazer cálculos a partir das expressões. Todas as fórmulas devem ser introduzidas no programa, no modo " folha de cálculo", definindo para a coluna a função a utilizar no cálculo.
- Vai ser-lhe pedido o ajuste de pontos experimentais por uma função não tabelada, o procedimento deverá ser o seguinte:

(NOTA: descrição feita para Origin 7, para outras versões poderá ser diferente)

Criar uma função nova de ajuste.

- ❖ Entrar em **analysis** » **non-linear Curve Fit** » **Advanced Fitting Tool...**
- ❖ Entrar em **Function** » **New.**

Escolha um nome para a função (default User1) e o nº de parâmetros **3.**
O Type é User-Defined.
Escolha 3 nomes para os 3 parâmetros (default é P1, P2 e P3).
Escolha as variáveis dependentes e independentes (default x, y).

Escreva a função que quer ajustar: $y = P1\sqrt{\dfrac{P2+x^2}{P3+x}}$.

Compile e faça o Save.

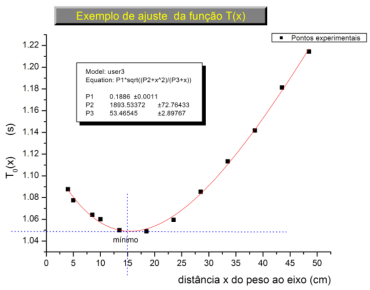
- ❖ Faça **Action** » **Fit .** Faça Activate Dataset se lhe for pedido, verificando se é a coluna que quer ajustar.

Pode e deve dar valores iniciais aos 3 parâmetros bem como introduzir restrições, (por exemplo manter um parâmetro fixo).

- ❖ Mande fazer **100 Iter**. Pode clicar novamente para ver se o ajuste melhora. Caso esteja satisfeito com o resultado clique em **Done.**

O programa coloca no gráfico a curva de ajuste e um painel com os valores encontrados dos parâmetros e respectivos erros.

Complete o Relatório e junte o/os gráfico dos pontos experimentais e curva de ajuste.



Parte III - Anexos teóricos

1. Pêndulo Físico.

Qualquer sólido com um eixo fixo que se desloca por acção do seu peso é designado por Pêndulo. Existe uma posição de equilíbrio estático. Essa posição de equilíbrio corresponde a uma linha que passa pelo eixo fixo e pelo Centro de Massa (CM) do corpo. Quando afastado dessa posição todos os pontos do corpo fazem um movimento de rotação em torno do eixo fixo, oscilando entre posições extremas à esquerda e direita da posição vertical de equilíbrio. Para caracterizar este movimento de oscilação (rotação com periodicidade) precisamos de conhecer algumas grandezas da Mecânica: Posição do CM, resistência ao movimento de rotação (Momento de Inércia I), intervalo de tempo entre 2 posições equivalentes (período T) e afastamento máximo (amplitude θ_0).

Para descrever o movimento precisamos conhecer a 2ª lei de Newton para a translação e rotação: $\begin{cases} m\vec{a} = \sum \vec{F} & \text{soma das forças} \\ I\vec{\alpha} = \sum \vec{\tau} & \text{soma dos momentos das forças} \end{cases}$ onde $\vec{a}$ e $\vec{\alpha}$ representam as acelerações linear e angular. Não havendo movimento de translação basta-nos a 2ª forma para descrever o movimento do corpo; no entanto, se quisermos ter informação da aceleração radial que cada ponto do corpo sofre, (ou outro que acompanhe o movimento, por exemplo o acelerómetro), temos de recorrer à 1ª forma.

Usando um referencial normal (x,y) com o eixo dos xx na vertical para baixo e yy horizontal para direita podemos utilizar as coordenadas polares usuais (θ, r), crescendo θ para yy crescentes. A posição $\theta = 0$ corresponde ao equilíbrio estático. O eixo dos zz está para fora da folha de papel. Neste referencial podemos escrever para o CM do corpo: (X_{CM} é a posição do CM)

(1.1)

$$I\alpha\vec{e}_z = MgX_{CM}\sin\theta(-\vec{e}_z) \Rightarrow \alpha = -\frac{MgX_{CM}\sin\theta}{I} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{MgX_{CM}}{I}\sin\theta$$

É esta equação diferencial que permite descrever o movimento do pêndulo. A constante $\frac{MgX_{CM}}{I}$ caracteriza o pêndulo e, portanto, tem uma designação especial:

$\frac{MgX_{CM}}{I} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{MgX_{CM}}{I}} \quad (rad/s)$ Muitas vezes torna-se útil usar em vez dela o seu inverso que tem as dimensões de um tempo:

(1.2)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgX_{CM}}} \quad \text{(s)} .$$

2. Pêndulo Simples (Matemático)

Quando reduzimos o nosso pêndulo a uma massa pontual estamos a simplificar matematicamente o corpo sólido. Estamos a retirar a geometria colocando toda a massa num ponto material colocado no CM do corpo original e ligando este ao eixo de rotação por um fio virtual, sem massa e inextensível: $I = MX_{CM}^2$. Ficamos com a equação:

(1.3)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{X_{CM}}\sin\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\sin\theta \qquad \text{com} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{X_{CM}}} .$$

De notar que perdemos nesta equação toda a informação relativa à massa do corpo (daí chamar-se pêndulo matemático).

3. Soluções da equação diferencial do movimento

A equação diferencial do movimento $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\theta$ não tem, no caso geral, uma solução matemática simples (usando as funções matemáticas conhecidas dos alunos). Existe no entanto uma aproximação, muito comum, que simplifica a equação e permite obter soluções facilmente. Consiste em admitir que o seno do ângulo é igual ao valor do próprio ângulo em radianos $\sin(\theta) \simeq \theta$. Antes de olharmos para a solução geral complicada vamos resolver a simplificada.

3.1 Solução aproximada para pequenos ângulos.

Quando aceitamos que $\sin(\theta) \simeq \theta$ transformamos a nossa equação noutra:

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \ \theta$ que tem solução matemática simples:

$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$ com A e B constantes de integração.

Se admitirmos que o pêndulo é afastado de um ângulo inicial θ_0 e largado (velocidade inicial nula), chegamos às leis do movimento:

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) & \text{ângulo} \\ \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = -\omega_0\theta_0 \sin(\omega_0 t) & \text{velocidade angular} \\ \alpha(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta_0 \cos(\omega_0 t) & \text{aceleração angular} \end{cases} \quad (1.4)$$

Trata-se de um movimento oscilatório de frequência angular ω_0 e portanto período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Se quisermos informação linear sobre um ponto à distância r do eixo basta usar as relações conhecidas da rotação:

$$\begin{cases} v(t) = r\omega(t) = -r\omega_0\theta_0 \sin(\omega_0 t) & \text{velocidade linear} \\ a(t) = r\alpha(t) = -r\omega_0^2\theta_0 \cos(\omega_0 t) & \text{aceleração linear} \end{cases} \quad (1.5)$$

3.2 Solução geral não aproximada.

Não cabe no âmbito deste Guia, nem das aulas da disciplina de MO, ensinar os alunos a resolver este tipo de equação diferencial $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\theta$. Contudo, para que se perceba se a aproximação dos pequenos ângulos deve ser sempre tomada como boa, devemos conhecer um resultado mais exacto e compará-lo com o aproximado.

A equação dada pode ser transformada em $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$ que por sua vez pode ser integrada por separação de variáveis obtendo-se: $t = \frac{1}{\omega_0}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - A^2\sin^2\varphi}}$ com $A = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$. Trata-se de um integral elíptico de 1ª espécie: $F(A,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - A^2\sin^2\varphi}}$. É uma função periódica. Para calcular o período basta reparar que, quando $\theta=\theta_0 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}$. Ora o tempo desde $\theta=0$ até $\theta=\theta_0$ corresponde a um quarto de período : $\frac{T}{4}=\frac{1}{\omega_0}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-A^2\sin^2\varphi}} \Rightarrow T=\frac{4}{\omega_0}F(A,\frac{\pi}{2})$. Para calcular este integral podemos usar a expansão em série, usando o teorema do binómio:

(1.6)

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+...\right]$$

Como se constata o período depende da amplitude angular de oscilação θ_0. Obtemos um termo correctivo: $\frac{T}{T_0}=\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+...\right]$ que nos permitirá conhecer o erro que cometemos ao usar as fórmulas dos pequenos ângulos no trabalho.

4. O acelerómetro.

As medições são feitas usando um pequeno circuito contendo um acelerómetro de dois eixos perpendiculares que é fixado no interior da vara oscilante, a uma distância L do eixo de rotação, de modo a que o seu eixo vertical coincida com a direcção radial e por conseguinte o eixo horizontal detecta a aceleração tangencial. Para conhecer o sinal detectado precisamos conhecer a aceleração do ponto P do Pêndulo onde está fixado o acelerómetro. Usando coordenadas polares para descrever o movimento:

$$\begin{cases} \vec{r}=L\vec{e}_r \\ \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=L\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \\ \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=L\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta-L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e}_r \end{cases}$$

onde L mede a distância do acelerómetro ao eixo rotação.

Como o ângulo do acelerómetro é o mesmo do CM do Pêndulo podemos usar a equação do movimento encontrada na aproximação dos pequenos ângulos.

$$\begin{cases} \theta=\theta_0\cos(\omega_0 t) \\ \frac{d\theta}{dt}=\omega=-\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t) \\ \frac{d^2\theta}{dt^2}=\alpha=-\omega_0^2\theta_0\cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

e obtemos:

$$\begin{cases} a_{horizontal}=-L\omega_0^2\theta_0\cos(\omega_0 t) \\ a_{vertical}=L\omega_0^2\theta_0^2\sin^2(\omega_0 t) \end{cases} \quad (1.7)$$

Verificamos que a componente horizontal oscila com uma frequência igual à do pêndulo, fazendo dela a candidata ideal para medir o período de oscilação, enquanto que a componente vertical tem uma frequência dupla (metade do período). A amplitude do sinal é proporcional ao ângulo máximo de oscilação, (na componente horizontal), pelo que a atenuação pode ser medida e relacionada com θ_0.

5. O Pêndulo do Laboratório.

No Laboratório existe um pêndulo constituído por uma vara de comprimento e massa (L_V, M_V), um peso de comprimento e massa (L_P, M_P) que desliza ao longo da vara e um pequeno rolamento, de raio e massa (R, M_R) que faz a ligação ao eixo de rotação. Podemos usar a vara sem ou com o peso, obtendo um Pêndulo simples ou mais complexo. Em qualquer dos casos a expressão que permite calcular o período é a mesma, obtida na equação (1.2) : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgX_{CM}}}$ onde, recorda-se, I é o momento de inércia total em relação ao eixo rotação, M a massa total e X_{CM} a distância entre o CM e o eixo.

5.1 Pêndulo físico simples (só vara sem peso).

(1.8)

$$\begin{cases} I = I_V + I_R = \dfrac{1}{3}M_V L_V^2 + \dfrac{1}{2}M_R R^2 \\ M = M_V + M_R \\ X_{CM} = \dfrac{M_V \dfrac{L_V}{2}}{M} \end{cases} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{3}M_V L_V^2 + \dfrac{1}{2}M_R R^2}{gM_V \dfrac{L_V}{2}}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\dfrac{2}{3}L_V + \dfrac{M_R R^2}{M_V L_V}}$$

De notar que usualmente o termo dependente do rolamento é desprezável face ao comprimento da vara. No nosso caso ele vale: $\dfrac{M_R R^2}{M_V L_V} = 0.004\ \text{cm}$. Obtém-se um período que não depende da massa, apenas depende do comprimento, como no pêndulo matemático. No entanto, se quisermos fazer a comparação verificamos que a localização da massa pontual equivalente não está no CM (meio da vara) mas sim a dois terços do eixo.

5.2 Pêndulo físico complexo (vara com peso).

(1.9)

$$\begin{cases} I = I_V + I_R + I_P = \dfrac{1}{3}M_V L_V^2 + \dfrac{1}{2}M_R R^2 + \dfrac{1}{12}M_P L_P^2 + M_P x^2 \\ M = M_V + M_R + M_P \\ X_{CM} = \dfrac{M_V \dfrac{L_V}{2} + M_P x}{M} \end{cases} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{3}M_V L_V^2 + \dfrac{1}{2}M_R R^2 + \dfrac{1}{12}M_P L_P^2 + M_P x^2}{g\left(M_V \dfrac{L_V}{2} + M_P x\right)}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\dfrac{A+x^2}{B+x}}$$

Usou-se **x** para representar a distância do CM do peso ao eixo de rotação e introduziram-se duas constantes **A** e **B**.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{A+x^2}{B+x}} \quad \text{com} \quad \begin{cases} A = \dfrac{M_V L_V^2}{3M_P} + \dfrac{M_R R^2}{2M_P} + \dfrac{1}{12}L_P^2 \\ B = \dfrac{M_V L_V}{2M_P} \end{cases}$$

A função $T_0(x)$ apresenta um mínimo para $x_{\min} = -B + \sqrt{B^2 + A}$ a que corresponde um período mínimo $(T_0)_{\min} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{2x_{\min}}$. Os valores das constantes **A**, **B** e **g** podem ser obtidos por ajuste do modelo a pontos experimentais, bem como a identificação deste mínimo.